בוחן אמצע, סמסטר אביב תשע"ג - 104016
26.5.13

מס. סטודנט: | | | | | | | | | | פקולטה: | | | | | | | | | |

- משך הבוחן : 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- בשאלות 1-4 יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בשאלות 5-7 יש לסמן את התשובה הנכונה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון **אלא אם כן צוין אחרת במפורש**. שאלה שבה ישנם יותר סימונים מהמותר לא תיבדק. **אין לתת נימוקים בשאלות 5-7, ולא יורדו נקודות על סימונים לא נכונים.**

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 5-7

	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7
א			
ב			
ג			
ד			
ה			

לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.

<u>שאלה מס' 1</u> : (14 נקודות)

מצאו את כל הפתרונות של המשוואה : $z^3 = -4i|z|$.

רשמו את הפתרונות בייצוגם האלגברי.

<u>שאלה מס' 2</u> : (30 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה בשלושה נעלמים ממשיים x, y, z כאשר a פרמטר ממשי.

$$\begin{cases} x + ay + (2a-1)z = a^2 + 1 \\ \quad ay \quad + \quad az = a^2 \\ x \quad + \quad (a^2 + a - 5)z = a^2 - 2a + 1 \end{cases}$$

א. לאילו ערכים של a אין למערכת פתרון?
ב. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?
ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות?
ד. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת **בכל** המקרים בהם למערכת יש אינסוף פתרונות.
ה. נתון כי למערכת קים פתרון שבו $x = 5$. כמה פתרונות למערכת? נמקו. .

<u>שאלה מס' 3</u> : (22 נקודות, 16 לסעיף א')

יהי $V = R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 ותהי $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ מטריצה ב- V.

נגדיר את שני תת המרחבים הבאים של V :

$$U = \left\{ A \in V \,\middle|\, AD = DA \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-a & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in R \right\}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל- U ול - W.

ב. הוכיחו כי $V = U + W$. האם הסכום הוא סכום ישר?

<u>שאלה מס' 4</u> : (16 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל F, ויהיו $v_1,...,v_n$ וקטורים שונים מ- 0 ב- V ותלויים ליניארית.

א. **הוכח** את הטענה הבאה: אם כל תת קבוצה ממש ולא ריקה של $v_1,...,v_n$ היא בלתי תלויה ליניארית אז קיימים סקלרים $\alpha_1,...,\alpha_n$ ב- F, **כולם** שונים מ- 0, כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

ב. הבא דוגמא נגדית לכך שהטענה ההפוכה איננה נכונה כלומר, שאם קיימים סקלרים $\alpha_1,...,\alpha_n$ ב- F, כולם שונים מ- 0, כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ אז **לא בהכרח** כל תת קבוצה של $v_1,...,v_n$ היא בלתי תלויה ליניארית.

הערה: בסעיף א', תת קבוצה ממש של $v_1,...,v_n$ פרושו תת קבוצה של $\{v_1,...,v_n\}$ ששונה מ $\{v_1,...,v_n\}$

שאלה מס' 5 : (6 נקודות)

יהיו $z_1, z_2 \neq -1$ פתרונות שונים של המשוואה $z^3+1=0$, אז הסכום $z_1^{2014}+z_2^{2014}$ שווה ל:

א. 1 ; ב. 2 ; ג. 0 ; ד. -1 ; ה. -2

שאלה מס' 6 : (6 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית מסדר $n\times n$. סמנו את שתי הטענות הנכונות מבין הטענות הבאות:

א. אם A אנטי סימטרית אז A^4 אנטי סימטרית.

ב. אם A ו- A^t תלויות ליניארית אז A סימטרית או אנטי סימטרית.

ג. אם A^2 סימטרית אז A סימטרית.

ד. אם A משולשת תחתונה אז A^2 משולשת תחתונה.

ה. אם A סימטרית וגם משולשת תחתונה אז A סקלרית.

שאלה מס' 7 : (6 נקודות)

יהי $V=R_5[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 5. סמנו את הקבוצה המהווה תת מרחב וקטורי של V:

א. כל הפולינומים ב- V שיש להם שורש ממשי.

ב. כל הפולינומים ב- V שמעלתם היא בדיוק 3.

ג. כל הפולינומים ב- V עבורם $x=7$ הוא שורש מריבוי בדיוק 2.

ד. כל הפולינומים ב- V עבורם $x=7$ הוא לא שורש שלהם.

ה. כל הפולינומים ב- V עבורם $x=7$ הוא שורש מריבוי לפחות 2.